Grado en Matemáticas – Ejercicios de Análisis Funcional
Relación 3 - Operadores lineales (para casa)

1. Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) T es sobreyectiva y hay números $\alpha > 0, \beta > 0$ tales que $\alpha\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant \beta\|x\|$ para todo $x \in X$.

   b) T es inyectiva y $\alpha B_Y \subset T(B_X) \subset \beta B_Y$.

   c) T es un isomorfismo topológico de X sobre Y y $\|T\| \leqslant \beta$, $\|T^{-1}\| \leqslant 1/\alpha$.

2. Sea X un espacio normado. Se dice que un funcional $f \in X^*$ alcanza su norma si existe $x \in B_X$ tal que $\|f\| = |f(x)|$.

   a) Prueba que si $f \in X^*$ alcanza su norma entonces existe algún $y \in S_X$ tal que $f(y) = \|f\|$.

   b) Sea $f : c_0 \to \mathbb{K}$ definido por $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{2^n}$. Prueba que $f \in c_0^*$ y no alcanza su norma.

   c) Prueba que todo funcional lineal continuo sobre ℓ_p con $1 < p < \infty$ alcanza su norma.

3. Dada una sucesión acotada $a \in \ell_\infty$, se define $T_a : \ell_1 \to \ell_1$ por

   $$(T_a x)(n) = a(n)x(n) \quad (x \in \ell_1,\ n \in \mathbb{N})$$

   Prueba que:

   a) $T_a \in L(\ell_1)$ y $\|T_a\| = \|a\|_\infty$. Deduce que $L(\ell_1)$ contiene una copia isométrica de ℓ_∞.

   b) Prueba que si T_a es inyectivo entonces su imagen es densa en ℓ_1.

   c) Prueba que T_a es un isomorfismo si, y sólo si, $\inf\{|a(n)| : n \in \mathbb{N}\} > 0$.

4. Fijado $y \in \ell_1$, para cada $x \in c_0$ se define una sucesión Tx por

   $$[Tx](n) = \sum_{k=n}^{\infty} x(k)y(k) \quad (n \in \mathbb{N})$$

   Prueba que T es un operador lineal continuo de c_0 en sí mismo y calcula su norma.